Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Kreditwesen
Direktor: Prof. Dr. Andreas Pfingsten

Institut für Kreditwesen

Diskussionsbeitrag 00-02

Die Kalkulation ausfallbedrohter Finanztitel mit Rating-Übergangsmatrizen

Dr. Frank Altrock
Hendrik Hakenes

ISSN 0949-6610

November 2000

Zusammenfassung

Im Unterschied zu traditionellen Verfahren der Risikokostenkalkulation in Banken bezieht die Kalkulation mit Rating-Übergangsmatrizen die möglichen zeitlichen Verläufe der Ausfälle und Ausfallwahrscheinlichkeiten explizit ein und gelangt so zu präziseren Ergebnissen. In diesem Beitrag analysieren wir einige Struktureigenschaften der Rating-Übergangsmatrizen im Hinblick auf zukünftig erwartete Portfoliostrukturen, und wir leiten Rechenformeln zur Barwertberechnung mit Hilfe von Rating-Übergangsmatrizen her. Wir zeigen auf, daß die Kalkulation mit Rating-Übergangsmatrizen eine stringente Fortentwicklung traditioneller Verfahren der Risikokostenkalkulation ist.

Abstract

In contrast to traditional methods of calculating the expected costs of risk in banks, the calculation with rating transition matrices includes the possible temporal courses of credit defaults and default probabilities and leads to more precise results. In our paper, we analyze some structural properties of rating transition matrices with regard to future expected portfolio structures, and we derive formulas for the calculation of the net present value with the help of rating transition matrices. From a methological point of view, the approach is a straightforward refinement of traditional approaches of calculating costs of risk.

Key Words: Rating, Risikoklassen, Credit Metrics, Markovketten

Wir danken Anja Guthoff und Prof. Dr. Andreas Pfingsten für Diskussion und Kritik. Die Autoren sind für verbleibende Fehler verantwortlich.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Kreditwesen
Universitätsstraße 14-16
D-48143 Münster
Telefon: +49 251 83-22881
Telefax: +49 251 83-22882
E-Mail: `21heha@wiwi.uni-muenster.de`

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

Traditionelle Verfahren[1] der Risikokostenkalkulation in Banken lassen den zeitlichen Verlauf von Ausfallrisikowahrscheinlichkeiten außer Betracht. Sie orientieren sich an einer statischen Ausfallwahrscheinlichkeit für den betrachteten Kreditnehmer bzw. die betrachtete Risikoklasse über die gesamte Kreditlaufzeit.

Die Kreditanalyse auf Basis von Ratingeinschätzungen gewinnt zunehmend an Bedeutung. Die Ratingänderungswahrscheinlichkeiten werden in sog. Rating-Übergangsmatrizen zusammengefaßt und z.B. von Standard & Poor's in ca. jährlichem Turnus veröffentlicht.[2] CreditMetrics von J.P. Morgan bietet ein standardisiertes Instrumentarium, um Finanztitel in Abhängigkeit von ihrem Rating zu bewerten.[3] Credit Metrics geht in drei Schritten vor: Es betrachtet zunächst alternative Ratings für das betrachtete Unternehmen nach Ablauf einer Periode. Jedem denkbaren Rating in einer Periode sind unterschiedliche (exogen vorgegebene) Zinsstrukturen zugeordnet. Mit diesen Zinsstrukturen kann man dann die in einer Periode noch ausstehenden Zahlungen verbarwerten. Im dritten Schritt wird unter Verwendung der Wahrscheinlichkeit, nach Ablauf einer Periode in den jeweiligen alternativen Ratingklassen (darunter die aktuelle) eingestuft zu sein, der heutige Barwert des Finanztitels als Erwartungswert der alternativen zukünftigen Barwerte errechnet.[4]

In diesem Beitrag wollen wir die methodischen Grundlagen der Kalkulation mit Rating-Übergangsmatrizen genauer als in der vorliegenden Literatur betrachten. Die Kalkulation mit Rating-Übergangsmatrizen stellt einen Anwendungsfall der u.a. in der Bevölkerungsstatistik

[1] Vgl. Brakensiek, T. (1991), S. 60 ff., und Schierenbeck, H. (1999b), S. 227 ff.
[2] Vgl. Standard & Poor's (1999), S. 12.
[3] Vgl. CreditMetrics (1997), S. 35 ff.
[4] Vgl. Rolfes, B. (1999), S. 415 ff.

oder der Atomphysik verwendeten Markovkettentheorie dar. Interessanterweise sind in der Rating-Übergangsmatrix bereits viele Informationen enthalten. Zum einen kann man aus dem dominanten Eigenvektor der Rating-Übergangsmatrix zukünftige Portfoliostrukturen ablesen. Diese Strukturinformation ist wichtig, um rechtzeitig Steuerungsmaßnahmen, z.B. gezieltes Eingehen von zusätzlichen Risiken in bestimmten Ratingklassen, zur Erreichung gewünschter zukünftiger Portfoliostrukturen ergreifen zu können. Aus den auf Jahresbasis berechneten Rating-Übergangsmatrizen lassen sich unterjährige Ausfallwahrscheinlichkeiten ermitteln.

Zum anderen impliziert die Rating-Übergangsmatrix *endogene* ausfallerwartungskonforme Zinsstrukturen für jede Ratingklasse. Diese können anstelle *exogen*[5] spezifizierter ratingabhängiger Zinsstrukturen zur Barwertberechnung verwendet werden. Für prominente Spezialfälle lassen sich kompakte Barwertrechenformeln angeben. Diese kann man zur Bestimmung von *Credit Spreads* verwenden.

Die Kalkulation von ausfallrisikobedrohten Finanztiteln mit Rating-Übergangsmatrizen ist den traditionellen Risikokostenkalkulationsverfahren überlegen, da sie die möglichen zeitlichen Verläufe der Ausfälle und Ausfallwahrscheinlichkeiten explizit einbezieht und damit bereits gegenwärtig die Möglichkeit zukünftig geänderter Einschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit analytisch antizipiert.

2 Begriffliche Grundlagen und Notation

Eine Bank oder ein Investor unterscheidet zwischen n Ratingklassen, dabei steht 1 für erstklassige, n für schlechte Bonität. Ein adressenausfallrisikobehaftetes Unternehmen der Ratingklasse $b \in \{1, \ldots, n\}$ emittiert ein Wertpapier mit der Laufzeit T und periodischen Kuponzahlungen c in den Zeitpunkten $1, \ldots, T-1$ und Einzahlung $1+c$ zum Zeitpunkt T. Die Rating-Übergangsmatrix informiert über die Wahrscheinlichkeit von Ratingänderungen. Die einzelnen Einträge der quadratischen Rating-Übergangsmatrix geben die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Unternehmen, dessen Rating zu Beginn einer Periode aus der Zeile des Eintrags abgelesen werden kann, nach Ablauf einer Periode das Rating aufweist, das mit der Spalte des Eintrags assoziiert ist. Wir definieren

$\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	die Rating-Übergangsmatrix
$\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$	der i-te Einheitsvektor
$\underline{1}$	$\sum_{j=1}^{n} \underline{e}_j = (1, \ldots, 1)'$
$b \in \{1, \ldots, n\}$	das Rating des Unternehmens in $t = 0$
$c \in \mathbb{R}_+$	der Kupon
$\underline{\underline{1}}$	die identische Abbildung, Einheitsmatrix

[5] Vgl. die Darstellung bei Rolfes, B. (1999), S. 366 ff., welcher *exogen* spezifizierte Credit Spreads verwendet. Diese müssen keineswegs flach oder stationär sein. Die Verwendung exogener Credit Spreads birgt die Gefahr von mathematischen Inkonsistenzen und Fehlsteuerungsimpulsen.

Beispiel: Sei $\underline{\underline{M}} := \begin{pmatrix} 0.90 & 0.09 \\ 0.09 & 0.85 \end{pmatrix}$. Ein Unternehmen, das sich in Ratingklasse 1 befindet, wird nach Ablauf einer Periode mit Wahrscheinlichkeit $p = 90\%$ das gleiche Rating haben, mit $p = 9\%$ in Ratingklasse 2 abgerutscht sein und entsprechend mit $p = 100\% - 90\% - 9\% = 1\%$ Konkurs angemeldet haben. Die Solvenzwahrscheinlichkeit eines Unternehmens der Ratingklasse 1 nach Ablauf einer Periode ist also $p = 99\%$.

Allgemein gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Unternehmen mit anfänglichem Rating b nach Ablauf einer Periode in Ratingklasse j befindet:

$$p_{b \to j} = \underline{e}'_b \, \underline{\underline{M}} \, \underline{e}_j. \tag{1}$$

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, daß sich das Unternehmen nach Ablauf von t Perioden in Ratingklasse j befindet, so erhält man entsprechend[6]

$$p_{(b \to j),t} = \underline{e}'_b \, \underline{\underline{M}}^t \, \underline{e}_j. \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Unternehmen der Ratingklasse b nach Ablauf von t Perioden solvent ist, d.h. sich in einer der n Ratingklassen befindet, ist also

$$\pi_t^b = \sum_{j=1}^{n} p_{(b \to j),t} = \sum_{j=1}^{n} \underline{e}'_b \, \underline{\underline{M}}^t \, \underline{e}_j = \underline{e}'_b \, \underline{\underline{M}}^t \, \underline{1}. \tag{3}$$

Wir nehmen an, daß einmal insolvent gewordene Unternehmen an nachfolgenden Zeitpunkten nicht wieder solvent werden können (zero recovery). Insolvenz ist also ein „absorbing state“. Deshalb sinkt die Solvenzwahrscheinlichkeit π_t^b monoton in t.

Die Solvenzwahrscheinlichkeit nach Ablauf von z.B. drei Perioden errechnet man für unser Zahlenbeispiel als

$$\begin{aligned}
\pi_3^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0.90 & 0.09 \\ 0.09 & 0.85 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0.7505 & 0.2075 \\ 0.2075 & 0.6352 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.7505 \\ 0.2075 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 95.80\%.
\end{aligned}$$

Von einer in $t = 0$ vereinbarten Zahlung erwartet die Bank von einem Kreditnehmer der Bonitätsklasse 1 nach drei Perioden also nur noch 95.80%.

3 Markovketten, Eigenwerte und -vektoren

Ein Eigenwert λ zu einer Rating-Übergangsmatrix $\underline{\underline{M}}$ ist eine Zahl, zu der ein Vektor $\underline{v}$ existiert, so daß

$$\underline{v}' \, \underline{\underline{M}} = \underline{v}' \, \lambda \tag{4}$$

[6] Dabei ist $\underline{\underline{M}}^0 := \underline{1}; \underline{\underline{M}}^1 := \underline{\underline{M}}; \underline{\underline{M}}^2 := \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}}; \ldots; \underline{\underline{M}}^t := \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}}^{t-1}$.

gilt.[7] Ein solcher Vektor $\underline{v}$ heißt dann Eigenvektor. Er beschreibt ein Kreditportfolio, das sich im Zeitablauf zwar verkleinert, dessen Struktur aber im Erwartungswert unverändert bleibt.[8] Im allgemeinen gibt es so viele Eigenvektoren wie Rating-Klassen.[9]

Sei nun das Ausgangsportfolio, nach Ratingklassen geordnet, im Vektor $\underline{a}$ zusammengefaßt, sei also

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{b=1}^{n} a_b \, \underline{e}_b \tag{5}$$

wobei $a_b \in \mathbb{N}$ für das Kreditvolumen der Kreditkunden der Bonitätsklasse b steht.

Ist $\underline{a}$ ein Eigenvektor der Übergangsmatrix $\underline{\underline{M}}$, so gibt der zugehörige Eigenwert λ die durchschnittliche einperiodige Solvenzwahrscheinlichkeit des Kreditportfolios $\underline{a}$ an. Diese informiert über die Wahrscheinlichkeit, nach Ablauf einer Periode weiterhin solvent zu sein, d.h. sich in einer der Rating-Klassen (nicht notwendigerweise die ursprüngliche) zu befinden. Als Begründung sei angeführt, daß in einer solchen Situation für das Kreditportfolio nach Ablauf einer Periode $\underline{a}' \, \underline{\underline{M}}$ der definitionsgemäße Zusammenhang $\underline{a}' \, \underline{\underline{M}} = \underline{a}' \, \lambda$ gilt. In $\underline{\underline{M}}$ sind Wahrscheinlichkeiten eingetragen, so daß die Zeilensummen kleiner als oder gleich eins sind. Daraus folgt,[10] daß auch alle Eigenwerte kleiner als eins sind. Der Bestand jeder einzelnen Ratingklasse verringert sich folglich im Erwartungswert mit dem Faktor $\lambda < 1$, also verringert sich auch der Gesamtportfoliobestand ausfallbedingt um diesen Faktor.

Da das Endportfolio $\underline{a} \, \lambda$ kollinear zum Eigenvektor $\underline{a}$ ist und somit Eigenvektor zum gleichen Eigenwert λ ist, gilt dieser Zusammenhang zudem auch für die zukünftige Entwicklung. Zwar schmilzt der Portfoliobestand im Erwartungswert durch zukünftige Ausfälle fortwährend um den Faktor $\lambda < 1$ ab, jedoch ändert sich die erwartete Struktur des Portfolios (bei unveränderten Parameterwerten) im Zeitablauf nicht.

Entspricht $\underline{a}$ keinem Eigenvektor $\underline{v}$ oder dessen Vielfachen, d.h. gilt $\nexists \, k : \underline{a} = k \, \underline{v}$, so ist die

[7] Die Einträge des Vektors bestehen inhaltlich aus der Anzahl der Kreditkunden der verschiedenen Ratingklassen oder alternativ aus der Summe der an die einzelnen Ratingklassen herausgelegten Beträge, also dem Kreditportfolio.

[8] Ein Beispiel erfolgt gegen Ende des Abschnittes.

[9] Wir nehmen im folgenden an, daß die Eigenwerte der Rating-Übergansmatrix $\underline{\underline{M}}$ paarweise voneinander verschieden sind. Diese Annahme ist keine starke Einschränkung, da bei einem Kontinuum von möglichen Eigenvektoren nur höchst zufällig zwei übereinstimmtn. Die Annahme erspart aber im folgenden Fallunterscheidungen, die die Argumentation in die Länge ziehen würden.

[10] Sind die Zeilensummen von $\underline{\underline{M}}$ kleiner oder gleich eins, so sind die Spaltensummen der Transponierten $\underline{\underline{M}}'$ kleiner oder gleich eins. Daher haben die Eigenwerte von $\underline{\underline{M}}'$ einen Betrag kleiner oder gleich eins. Da die Berechnung von Eigenwerten invariant gegenüber Transposition ist, sind die Eigenwerte einer Matrix $\underline{\underline{M}}$ aber immer gleich den Eigenwerten der Transponierten $\underline{\underline{M}}'$. Daraus folgt die Behauptung.

folgende Konvergenzeigenschaft bemerkenswert. $\underline{a}$ läßt sich stets[11] schreiben als Summe von Eigenvektoren $\underline{v}_i$,

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i, \tag{6}$$

somit gilt für die erwartete Veränderung nach Verstreichen einer Periode

$$\underline{a}\,\underline{\underline{M}} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \right) \underline{\underline{M}} = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \, \underline{\underline{M}} = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \, \lambda_i. \tag{7}$$

Nach Verstreichen von t Perioden gilt somit

$$\underline{a}\,\underline{\underline{M}}^t = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \right) \underline{\underline{M}}^t = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \, \underline{\underline{M}}^t = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \, {\lambda_i}^t. \tag{8}$$

Betrachtet man also das Anfangsportfolio als Summe von Eigenvektoren, so sind auch die zukünftig erwarteten Portfolios wieder Summen der gleichen Eigenvektoren, multipliziert mit Potenzen der zugehörigen Eigenwerte. Das Eigenportfolio, das zum betragsmäßig größten Eigenwert gehört, dominiert dabei die anderen Eigenportfolios im Laufe der Zeit, wie wir im folgenden erst formal zeigen und dann an einem Beispiel verdeutlichen.

Im folgenden seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Eigenwerte nach ihrer betragsmäßigen Größe sortiert, sei also λ_1 der betragsmäßig größte Eigenwert. Durch Ausklammern folgt aus (8)

$$\begin{aligned} \underline{a}\,\underline{\underline{M}}^t &= {\lambda_1}^t \sum_{i=1}^{n} k_i \, \underline{v}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \\ &= {\lambda_1}^t \left(k_1 \, \underline{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i \, \underline{v}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Wie oben angenommen, gilt $|\lambda_i| < |\lambda_1| \; \forall \, i \geq 2$, somit konvergieren dann die Terme unter der Summe gegen Null und somit der gesamte Term in der Klammer gegen $k_1 \, \underline{v}_1$.[12]

Daraus ergeben sich zwei wesentliche Eigenschaften. Erstens konvergiert für große t die erwartete Struktur des Kreditportfolios gegen das zum größten Eigenwert gehörige Eigenportfolio. Zweitens geht der erwartete Faktor, um den sich der Bestand des Kreditportfolios verringert, gegen den größten Eigenwert. Die Konvergenz verläuft um so schneller, je kleiner der Quotient aus größtem und zweitgrößtem Eigenwert $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$.[13]

[11] Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Daher bilden die Eigenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und jedes Kreditportfolios läßt sich als Linearkombination aus Eigenportfolios schreiben. Vgl. auch Fischer, G. (1997), S. 172

[12] Voraussetzung hierfür ist, daß der Anteil von $\underline{v}_1$ an $\underline{a}$ nicht 0 ist, also $k_1 \neq 0$ ist.

[13] Man gelangt im Wesentlichen zu äquivalenten Ergebnissen, wenn einige der Eigenwerte übereinstimmen.

Tabelle 1: Beispiel für die erwartete Änderung der Populationsgröße

t	a_1	a_2	a_1/a_2	s_t/s_{t-1}
0	1000	2000	0.5000	$---$
1	1080	1790	0.6034	0.9567
2	1133	1619	0.7000	0.9588
3	1165	1478	0.7886	0.9606
4	1182	1361	0.8684	0.9620
5	1186	1263	0.9390	0.9632
6	1181	1181	1.0006	0.9642
7	1169	1110	1.0537	0.9650
8	1152	1049	1.0990	0.9657
16	944	742	1.2722	0.9678
32	572	435	1.3149	0.9683
64	205	156	1.3155	0.9684
∞	$\to 0$	$\to 0$	$\to 1.3156$	$\to 0.9684$

a_1 = Kunden der Klasse 1, a_2 = Kunden der Klasse 2, s_t = Summe der Kunden zum Zeitpunkt t.

Betrachten wir wieder unser obiges Beispiel mit $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.09 \\ 0.09 & 0.85 \end{pmatrix}$. Die zugehörigen Eigenwerte[14] sind dann $\lambda_1 \approx 0.9684$, $\lambda_2 \approx 0.7816$, ein Eigenportfolio zum größten Eigenwert ist $\underline{v}_1 \approx (7961, 6051)$.[15]

Im Laufe der Zeit sollte sich also das zahlenmäßige Verhältnis zwischen der Kunden aus Klasse 1 zu denen aus Klasse 2 immer mehr 1.3156 nähern, die erwartete Größe der Population sollte sich in jeder Periode um den Faktor ≈ 0.9684 verringern. Wählt man als beliebiges Anfangsportfolio z.B. 1000 Kunden der Klasse 1, 2000 Kunden der Klasse 2, so werden diese Zahlen bestätigt (siehe Tabelle 1).

Die Quote der erwarteten Anzahl solventer Kreditkunden nach jeder Periode konvergiert, ebenso wie das Verhältnis zwischen den erwarteten Größen der Bonitätsklassen, gegen die berechneten Zahlen.[16]

Beschrieben ist hier der Fall einer Kundengruppe ohne Neuzugänge, Abgänge geschehen nur durch Konkurs.[17] Man kann die auf diese Weise ermittelte Strukturinformation mit

[14] Zur Vorgehensweise bei der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix vgl. Fischer, G. (1997), S. 163 ff.

[15] $\begin{pmatrix} 7961 \\ 6051 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0.90 & 0.09 \\ 0.09 & 0.85 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7709 \\ 5860 \end{pmatrix}' \approx \begin{pmatrix} 7961 \\ 6051 \end{pmatrix}' \cdot 0.9684$. Nach einer Periode ist also das Verhältnis zwischen Krediten der Bonitätsklasse 1 und 2 trotz Ausfällen und Ratingänderungen konstant geblieben.

[16] Wegen der vergleichbaren Größenordnung der beiden Eigenwerte verläuft die Konvergenz relativ langsam.

[17] Die Kreditverträge haben also unbeschränkte Laufzeit.

gewünschten zukünftigen Portfoliostrukturen vergleichen und erhält so ein Indiz dafür, in welchen Risikoklassen zukünftig Korrekturen durch Neuzugänge vorzunehmen sind.

Die Berechnung der Eigenwerte einer Rating-Übergangs-Matrix hat aber noch eine weitere Bedeutung als die Berechnung einer langfristig erwarteten Portfoliostruktur. Anhand der Eigenwerte kann auf elegante Weise auch die unterjährige Ausfallwahrscheinlichkeit (im folgenden Beispiel die Ausfallwahrscheinlichkeit auf Monatsbasis) von Krediten berechnet werden. Gesucht ist zu diesem Zweck eine Matrix $\underline{\underline{M}}_{1/12}$ mit $\underline{\underline{M}}_{1/12}{}^{12} = \underline{\underline{M}}$. Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ zu einer Matrix $\underline{\underline{M}}$ bekannt, so zerfällt die Matrix in mehrere Faktoren,

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{V}}'\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1} \text{ mit } \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \underline{\underline{V}} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)\,. \tag{10}$$

Definiert man dann

$$\underline{\underline{M}}_m := \underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1} \text{mit } \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}} := \begin{pmatrix} \sqrt[12]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[12]{\lambda_n} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

so folgt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{1/12}{}^{12} &= \underbrace{\left(\underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1}\right)\left(\underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1}\right)\cdots\left(\underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1}\right)}_{12 \text{ mal}} \\ &= \underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underbrace{\left(\underline{\underline{V}}'^{-1}\underline{\underline{V}}'\right)}_{\underline{\underline{1}}} \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1} \cdots \underline{\underline{V}}' \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1} \\ &= \underline{\underline{V}}' \underbrace{\sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}} \cdots \sqrt[12]{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{12 \text{ mal}} \underline{\underline{V}}'^{-1} \\ &= \underline{\underline{V}}'\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}'^{-1} \\ &= \underline{\underline{M}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Also ist $\underline{\underline{M}}_{1/12}$ die zwölfte Wurzel aus $\underline{\underline{M}}$, und jede Wurzel einer Matrix läßt sich ziehen, indem man die Matrix erst diagonalisiert und dann die Wurzel der Diagonale zieht.

In obigem Beispiel sind die Eigenwerte bereits bekannt, es ergibt sich

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 0.9684 & 0 \\ 0 & 0.7816 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} 0.7961 & 0.6051 \\ -0.6051 & 0.7961 \end{pmatrix}.$$

Jetzt kann mit der oben beschriebenen Methode die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredites erster Bonität nach einem Monat berechnet werden:

$$\underline{\underline{M}}_{1/12} = \begin{pmatrix} 0.9909 & 0.0085 \\ 0.0085 & 0.9861 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \pi^1_{1/12} = 99.9369\%.$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit beläuft sich also auf 0.0631%. Eine Berechnung ohne Berücksichtigung möglicher Rating-Veränderungen innerhalb eines Jahres hätte zu einer um den Faktor 1.33 abweichenden Ausfallwahrscheinlichkeit[18] geführt.

4 Ausfallerwartungen und Barwertberechnung

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Barwertberechnungen unter Berücksichtigung der in der Matrix $\underline{\underline{M}}$ implizierten Solvenzwahrscheinlichkeiten anstellen. Wir unterstellen dabei durchgängig, daß die bewertende Bank risikoneutral ist, so daß wir für Bewertungszwecke keine Preise für übernommene Risiken berücksichtigen brauchen und stattdessen mit dem risikolosen Zinssatz diskontieren können. Ist die Bank risikoscheu, so sind die errechneten Barwerte infolge zu schwacher Diskontierung zu hoch. Korrekte Ergebnisse erhielte man in diesem allgemeineren Fall durch Verwendung des äquivalenten Martingalmaßes[19] anstelle der Übergangswahrscheinlichkeiten. Ferner unterstellen wir Recovery-Rates von Null, um die Berechnungsformeln einfach zu halten. Positive Recovery-Rates lassen sich leicht in unser Erwartungswertkalkül integrieren, ohne daß dies die methodische Konsistenz zwischen Informationen aus der Rating-Übergangsmatrix und ausfallerwartungskonformer Diskontierung beeinflussen würde.

4.1 Ausfallerwartungskonforme Diskontierungsfaktoren

Auf Basis der Definitionen aus Abschnitt 2 können wir nun ausfallerwartungskonforme Diskontierungsfaktoren bestimmen. Sei d_t der Diskontierungsfaktor für sichere Zahlungen im Zeitpunkt t. Dann errechnet man den Diskontierungsfaktor für Zahlungen im Zeitpunkt t von Unternehmen der Ratingklasse b als

$$d_t^b = d_t \, \pi_t^b \, . \tag{13}$$

Der entsprechende Abzinsungsfaktor für Zahlungen am vorhergehenden Zeitpunkt ist $d_{t-1}^b = d_{t-1} \, \pi_{t-1}^b$. Daraus folgt für den einperiodigen Forward-Diskontierungsfaktor f_t^b für Unternehmen der Ratingklasse b:

$$f_t^b = \frac{d_t^b \, \pi_t^b}{d_{t-1}^b \, \pi_{t-1}^b} \, . \tag{14}$$

Man beachte folgenden Zusammenhang: Im Falle einer flachen Zinsstruktur gilt: $f_t := const. \forall t$. Man könnte vermuten, daß bei im Zeitablauf unveränderter Rating-Übergangsma-

[18] $100\% - \sqrt[12]{99\%} = 0.0837\%, 0.0837\% : 0.0631\% \approx 1.33$

[19] Vgl. allgemein Harrison, J./Kreps, D. M. (1979), sowie bezogen auf Ratingklassen-Kalkulation Jarrow, R. A./Lando, D./Turnbull, S. M. (1997).

trix auch die zu den Ratingklassen b gehörenden ausfallerwartungskonformen Zinsstrukturen, die durch die f_b^t aufgespannt werden, flach sind. Damit dies der Fall ist, muß $\pi_t^b / \pi_{t-1}^b = const.\ \forall t$ gelten, d.h. die Wahrscheinlichkeit, im Zeitpunkt t nicht auszufallen, müßte im Zeitablauf konstant sein. Dies ist aber nur zufällig der Fall. Betrachten wir das einleitende Beispiel mit $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.09 \\ 0.09 & 0.85 \end{pmatrix}$: Für ein Unternehmen der Ratingklasse 1 beispielsweise errechnet man die Solvenzwahrscheinlichkeit nach Ablauf von 1, 2 und 3 Perioden als 99.00%, 97.56% bzw. 95.80%. Daraus errechnen sich periodische Solvenzwahrscheinlichkeiten von 99.00%, 98.55% und 98.19%. Aus Abschnitt 3 ist bekannt, daß die Solvenzwahrscheinlichkeit gegen den höchsten Eigenwert, 96.84%, konvergiert. Man kann also festhalten, daß aus zeitkonstanten Rating-Übergangsmatrizen berechnete ausfallerwartungskonforme Zinsstrukturen bei flacher risikoloser Zinsstruktur anfangs stärkere Schwankungen aufweisen können, mit zunehmendem Zeithorizont aber flacher verlaufen.

4.2 Ausfallerwartungskonforme Rentenbarwertfaktoren

Mit den im vorherigen Unterabschnitt behandelten ausfallerwartungskonformen Diskontierungsfaktoren lassen sich beliebige Strukturen diskontieren. In diesem Abschnitt wollen wir einen Spezialfall etwas ausführlicher betrachten, da er die Ableitung kompakter Rechenformeln erlaubt: den Fall der Kuponanleihe bei flacher (risikoloser) Zinsstruktur. Für diesen Fall kann man relativ einfach und elegant faire ausfallerwartungskonforme Pari-Kuponsätze berechnen, welche häufig den methodischen Ausgangspunkt für die Berechnung von *Credit Spreads* darstellen.

Für die weiteren Berechnungen benötigen wir den Satz über die Neumann-Reihe:[20] Sei $\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit

$$|\lambda_1| < 1, \ldots, |\lambda_n| < 1, \tag{15}$$

der Betrag aller Eigenwerte sei also kleiner als eins.[21]

Dann ist $(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}})$ invertierbar und es gilt

$$(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}^2 + \ldots . \tag{16}$$

[20] Vgl. Alt, H. G. (1992), S. 104

[21] Diese Bedingung ist für Rating-Übergangsmatrizen erfüllt. Sie läßt sich weiter abschwächen zu $\limsup_{i \to \infty} \|\underline{\underline{M}}^i\|^{\frac{1}{i}} < 1$.

Für endliche Summen folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{T} \underline{\underline{M}}^i &= \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}^2 + \ldots + \underline{\underline{M}}^T \\
&= \underline{\underline{M}} \sum_{i=0}^{T-1} \underline{\underline{M}}^i \\
&= \underline{\underline{M}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i - \sum_{i=T}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i \right] \\
&= \underline{\underline{M}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i - \underline{\underline{M}}^T \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i \right] \\
&= \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}^T) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{M}}^i \right] \\
&= \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}^T)(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}})^{-1}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Unter Zuhilfenahme dieses Satzes können wir die Kuponanleihe aus Abschnitt 2 bewerten. Hierzu muß man die an den einzelnen Kuponterminen jeweils erwarteten Kuponzahlungen mit dem zeitkonstanten risikolosen Zinssatz r diskontieren. Der Barwert B des Gesamtzahlungsstroms berechnet sich demnach zu

$$
B = \frac{c\,\pi_1^1}{1+r} + \frac{c\,\pi_2^1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{c\,\pi_{T-1}^1}{(1+r)^{T-1}} + \frac{(1+c)\,\pi_T^1}{(1+r)^T}\,. \tag{18}
$$

Setzen wir für $\pi_t^b = \underline{e}_b' \, \underline{\underline{M}}^t \, \underline{1}$ ein und definieren wir $\underline{\underline{\Phi}} := \frac{\underline{\underline{M}}}{1+r}$, so läßt sich dieser Ausdruck schreiben als[22]

$$
\begin{aligned}
B &= \underline{e}_b' \left(\underline{\underline{\Phi}}^T + c \sum_{j=1}^{T} \underline{\underline{\Phi}}^i \right) \underline{1} \\
&= \underline{e}_b' \left(\underline{\underline{\Phi}}^T + c\,\underline{\underline{\Phi}} \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Phi}}^T\right) \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Phi}}\right)^{-1} \right) \underline{1} \\
&= \underline{e}_b' \left(c\,\underline{x}_T + \underline{w}_T \right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

mit $\underline{x}_T := \underline{\underline{\Phi}} \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Phi}}^T\right) \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Phi}}\right)^{-1} \underline{1}$ und $\underline{w}_T := \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{1}$. Hierbei ist $\underline{x}_T$ ein Vektor von ausfallerwartungskonformen T-periodigen Rentenbarwertfaktoren für alternative Ratingklassen. $\underline{w}_T$ ist ein Vektor von ausfallerwartungskonformen T-periodigen Diskontierungsfaktoren für alternative Ratingklassen.

4.3 Anwendung ausfallerwartungskonformer Barwertkalküle

Die in den bisherigen Unterabschnitten dieses Kapitels dargestellten Barwertkalküle können in unterschiedlicher Weise verwendet werden. Unter Zuhilfenahme dieser Rechenformel kann

[22] Aus $\|\underline{\underline{M}}\| < 1$ und $r \geq 0$ folgt $\|\underline{\underline{\Phi}}\| < 1$, damit ist (15) erfüllt, der Satz über die Neumann-Reihe ist anwendbar.

u.a. der faire Preis einer ausfallriskobehafteten Anleihe oder eines Kredites mit gegebenem Kupon c von Unternehmen der Ratingklasse b berechnet werden.

Damit ist das Anwendungfeld der Kreditrisikokostenkalkulation angesprochen.[23] Ausgehend von undifferenzierten Kreditrisikokosten stellen Verfahren, die auf ratingklassenspezifische Risikokosten abstellen, eine Verbesserung dar. Ein naives Verfahren der Risikokostenkalkulation würde z.B. das anfängliche Ausfallrisiko der Ratingklasse bei Kreditvergabe zugrunde legen. Ein solches Verfahren vernachlässigt den Aspekt der Ausfallrisikoveränderung während der Kreditlaufzeit.

Betrachten wir wieder unser einleitendes Beispiel und nehmen einen risikolosen Zinssatz von $r = 5\%$ sowie einen Kupon von $c = 6.25\%$ an. Der Kredit habe eine Laufzeit von $T = 2$. Dann errechnet man für Unternehmen der Ratingklasse 1 einen Barwert von $B = 0.9991$. Der Kredit hat also einen Wert von unter 100%. Allein unter Berücksichtigung des Ausfallrisikos (Betriebskosten der Kreditvergabe und weitere Gemeinkosten seien vernachlässigt) wäre eine Kreditvergabe zu Pari bereits unvorteilhaft, wenn die Kalkulation mit Rating-Übergangsmatrizen zugrunde gelegt wird. Betrachtet man z.B. nur das anfängliche Ausfallrisiko der Ratingklasse 1 von 1%, so errechnet sich hieraus, wir vernachlässigen Besicherungen, eine Risikomarge von

$$\mathrm{RM} = \frac{0.01}{1 - 0.01} \approx 1.01\% \,.$$

Diese wäre durch die Bruttomarge $c - r = 1.25\%$ durchaus abgedeckt, was die Vorteilhaftigkeit der Kreditvergabe zu Pari suggeriert.[24] Auch die Diskontierung mit risikolosem Zins und anschließende Wahrscheinlichkeitsgewichtung liefert irreführende Ergebnisse: Man erhält einen Barwert von $B = 1.0232$, welcher bei einer Solvenzwahrscheinlichkeit von 99% nach einer Periode und 98.01% nach zwei Perioden einen Barwert von $B = 1.0130$ bzw. 1.0029 ergibt. Eine derartige Kalkulation würde also zu Fehlentscheidungen führen.

Weniger naive Verfahre antizipieren die zukünftigen Risikoveränderungsmöglichkeiten und bilden diese in den Ausfallrisikosätzen ab. Typischerweise sind die Ausfallrisikosätze, welche man z.B. aus historischen Ausfällen deduziert, dann nicht nur rating-, sondern auch laufzeitabhängig. Gemäß dem von uns vorgestellten Kalkül sind nun allerdings auch diese Verfahren nicht hinreichend, um eine sämtliche verfügbare Informationen korrekt berücksichtigende Kreditentscheidung herbeizuführen. Derartige Verfahren greifen dann zu kurz, wenn sie die prinzipiell vorhandene Information über die zeitliche Struktur der Kapitalbindung für die Zwecke der Ausfallrisikokalkulation ungenutzt lassen. Nehmen wir z.B. an, ein solches

[23] Vgl. insb. Schierenbeck, H. (1999b), S. 227 ff. oder Brakensiek, T. (1991), S. 60 ff. Diesen Mangel behebt Rolfes, B. (1999), S. 366 ff., indem er auf historischen Daten beruhende *laufzeitabhängige* ratingspezifische Ausfallraten ermittelt. Der Zusammenhang dieser laufzeitabhängigen ratingspezifischen Ausfallraten zu den in der Rating-Übergangsmatrix abgebildeten Ratingwanderungen bleibt jedoch unklar.

[24] Betrachtet man in Modifikation dieser Vorgehensweise die Wahrscheinlichkeit, bis zum Laufzeitende solvent zu bleiben, unter Vernachlässigung möglicher Ratingveränderungen, so erhielte man eine kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit von $1 - 0.99^2 = 1.99\%$. Annualisiert man diese Ausfallwahrscheinlichkeit, d.h. teilt man z.B. einfach durch 2, so erhält man daraus eine Risikomarge von $RM = 1.005\%$. Auch diese wäre durch die Bruttomarge abgedeckt.

Verfahren ermittle das Ausfallrisiko, indem es die tatsächlichen Ausfälle von zweijährigen *Tilgungsdarlehen* an Unternehmen mit der Ursprünglichen Ratingklasse 1 aufzeichnet. Ein solches Verfahren käme — Stationarität der Daten und eine hinreichend große Stichprobe vorausgesetzt — zu einer Risikomarge von ca. 1.30%, so daß ebenso wie in unserem ausfallerwartungsadjustierten Barwertkalkül eine Ablehnung des Kredites angeraten wäre. Verwendet man nun allerdings die empirisch generierten Ausfallmargen, um *annuitätische Darlehen* zu bewerten, so kommt es u.U. zu Fehlsteuerungen. Nehmen wir beispielsweise an, bei dem zweijährigen Darlehen werde das Kapital zu gleichen Teilen nach Ablauf der Perioden 1 und 2 zurückgezahlt, der Zinssatz sei weiterhin 6.25%. Verbarwertet man diesen Zahlungsstrom, so erhält man $B = 100.04$. Tatsächlich ist die Kreditvergabe also vorteilhaft. Es zeigt sich, daß die Ausfallrisikosätze nicht nur rating- und laufzeitspezifisch, sondern auch zahlungsstrukturspezifisch sind, was nach einer adäquaten Abbildung im Kalkulationsverfahren verlangt.

Desweiteren kann (19) dazu verwendet werden, um denjenigen fairen Kupon c zu berechnen, welcher die Anleihe von einem Unternehmen der Ratingklasse b zu pari notieren läßt. Das „faire“ c kann man nach obiger Überlegung aus

$$\begin{aligned} 1 &= \underline{e}_b' \, (c\, \underline{x}_T + \underline{w}_T) \quad \Longrightarrow \\ c &= \frac{1 - \underline{e}_b' \, \underline{w}_T}{\underline{e}_b' \, \underline{x}_T} \end{aligned} \tag{20}$$

berechnen. Aus der Differenz $c - r$ ergeben sich *Credit Spreads*, die (u.a.) von der Laufzeit T und dem Rating b des betrachteten Unternehmens abhängen. Sie lassen sich zu einer *Term Structure of Credit Spreads* verdichten. Für Unternehmen der Ratingklasse 1 z.B. ergibt sich basierend auf dem einleitenden Beispiel eine Zinsstruktur von 6.06%, 6.30%, 6.50%, 6.66%, ..., 7.25% für $1, 2, 3, 4, \ldots, 10$ Jahre. Unternehmen der Ratingklasse 2 hingegen haben eine Zinsstruktur von 11.70%, 11.43%, 11.20%, 11.00%, ..., 10.24% zu beachten.[25]

5 Kritische Würdigung

Zur Berechnung der Gleichungen mußten wir einige Annahmen machen, die wir im folgenden kritisch würdigen wollen. So sind wir z.B. von einem stationären Prozeß ausgegangen, bei dem sich die Rating-Übergangsmatrix im Zeitverlauf nicht ändert. In praktischen Anwendungen jedoch sollte die Matrix regelmäßig überprüft und ggf. durch neue Berechnungen adjustiert werden.

Für den Prozeß, mittels dessen sich das Rating der Kreditnehmer oder Finanztitel ändert, haben wir die Markov-Eigenschaft angenommen. Der Prozeß hat also kein Gedächtnis, und die Übergangswahrscheinlichkeiten für z.B. einen Kreditnehmer der Bonitätsklasse 2 sind unabhängig davon, ob er in der letzten Periode aus Klasse 1 abgestiegen ist, oder ob er sich

[25] Wir vermeiden in diesem Zusammenhang die Begriffe ”normale” und ”inverse” Zinsstruktur, da die Strukturen nicht auf Liquiditätspräferenzen, Erwartungen für Zinsänderungen o.ä. basieren.

seit längerer Zeit konstant in Klasse 2 befindet.[26]

Durchgängig gehen wir von risikoneutralen Banken oder Investoren aus. Es werden daher nur Risikoaufschläge und keine Risikoprämien in die Überlegungen einbezogen. Dies macht die Betrachtung einzelner Kredite oder Finanztitel überhaupt erst möglich, da Portfolioeffekte vernachlässigt werden können.

Besicherungen von Krediten wurden nicht berücksichtigt, es werden also Ausfallraten von 100% angenommen. Durch eine leichte Modifikation der Rating-Übergangsmatrix ist es aber möglich, geringere Ausfallraten, die zudem von der Bonität des Kreditnehmers abhängig sein dürfen, zu implementieren. Dadurch werden sich die berechneten Barwerte tendenziell erhöhen.

Für den Fall, daß insolvent gewordene Unternehmen wieder solvent werden können, genügt es wiederum, die Rating-Übergangsmatrix leicht zu modifizieren. Die Matrix müßte um die Bonitätsklasse $n + 1$ (für Insolvenz) erweitert werden. In der letzten Spalte wären die Wahrscheinlichkeiten dafür einzutragen, daß ein insolventes Unternehmen wieder in eine höhere Bonitätsklasse gelangt und die Zahlungsfähigkeit zurückerlangt.[27]

Auch in dem Fall, daß sich das Kreditportfolio zusätzlich durch Neuzugänge und reguläre Abgänge in jeder Periode verändert, kann mittels Matrizenrechnung die langfristige Struktur des Portfolios errechnet werden.[28]

6 Schlußbetrachtung

Im vorliegenden Beitrag haben wir zunächst untersucht, wie Eigenwerte und Eigenvektoren von Rating-Übergangsmatrizen dazu genutzt werden können, um erwartete strukturelle Entwicklungen von Kreditportfolios transparent machen zu können. Nicht unbedingt intuitiv ist die tatsächliche Konvergenz hin zu einer Portfoliostruktur, die dem größten Eigenvektor der als stationär angenommenen Rating-Übergangsmatrix entspricht. Außerdem erlaubt die Zerlegung in Eigenvektoren die (keineswegs triviale) Berechnung von konsistenten unterjährigen Übergangsmatrizen, welche für die Kalkulation kurzfristiger Finanztitel benötigt wird.

Im zweiten Teil dieses Beitrags haben wir ein Verfahren beschrieben, das die in der Rating-Übergangsmatrix vorhandenen Informationen in eine konsistente Barwertberechnung umsetzt. In der einordnenden Würdigung zeigt sich eine methodisch interessante Parallele zwi-

[26] Ist die Markov-Eigenschaft nicht erfüllt, so werden z.B. die Übergangswahrscheinlichkeiten nach 2 Perioden nicht durch $\underline{\underline{M}}^2$, sondern durch eine leicht andere Matrix beschrieben.

[27] In diesem Fall wäre es jedoch uninteressant, den größten Eigenwert der Matrix zu berechnen: er wäre immer 1. Der zugehörige Eigenvektor wäre das Portfolio, in dem in jeder Periode genausoviele Kreditnehmer insolvent wie wieder solvent werden.

[28] Werden z.B. mit $\underline{n}$ die (konstanten) jährlichen Neuzugänge bezeichnet, so ergibt sich $\underline{a}_{t+1} = \underline{a}_t \underline{\underline{M}} + \underline{n}$, und im Übergang $t \to \infty$ somit $\underline{a} = \underline{n}(\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{1}})$.

schen der Marktzinsmethode[29] und denen der Risikokostenkalkulation: Ausgehend von einer Situation, in der die zur Kalkulation verwendeten Zinssätze (Ausfallrisikosätze) nicht an den Kapitalmarktopportunitäten (tatsächlichen Ausfallraten der betreffenden Ratingklasse) orientiert waren, werden in einem ersten Schritt laufzeitadäquate Opportunitätszinssätze (laufzeitadäquate Ausfallrisikosätze) verwendet. In einem zweiten Schritt wird zusätzlich zur Laufzeit die Zahlungsstruktur und damit die Kapitalbindung der zu kalkulierenden Finanztitel einbezogen, und es werden Barwerte berechnet. Nach unserer Wahrnehmung ist der zweite Schritt, die marktzinsorientierte Barwertberechnung auf Basis im allgemeinen nicht flacher Zinsstrukturen, in der Finanzierungstheorie seit Jahrzehnten und in der Bankkalkulation seit Jahren Allgemeingut, wohingegen die Ausfallrisikokalkulation — wenn überhaupt — auf der ersten Stufe angelangt ist.

Literatur

Alt, H. G. (1992), Lineare Funktionalanalysis, 2. Aufl.

Brakensiek, T. (1991), Die Kalkulation und Steuerung von Ausfallrisiken im Kreditgeschäft der Banken, Schriftenreihe des Instituts für Kreditwesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster Bd. 44.

CreditMetrics (1997), Technical Document.

Fischer, G. (1997), Lineare Algebra, 11. Aufl.

Harrison, J./Kreps, D. M. (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, in: Journal of Economic Theory, Vol. 20, S. 381-408.

Jarrow, R. A./Lando, D./Turnbull, S. M. (1997), A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, in: The Review of Financial Studies, Vol. 10, No. 2, 1997, S. 481-523.

Rolfes, B. (1999), Gesamtbanksteuerung.

Schierenbeck, H. (1999a), Ertragsorientiertes Bankmanagement, Bd. 1, 6. Aufl.

Schierenbeck, H. (1999b), Ertragsorientiertes Bankmanagement, Bd. 2, 6. Aufl.

Standard & Poor's (1999), Ratings Performance 1998 – Stability & Transition, march 1999, S. 3-37.

[29] Vgl. z.B. Schierenbeck, H. (1999a), S. 72 ff.