Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen einer höchstens regulär singulären Differentialgleichung

von Sascha J. Hokamp
hokamps@math.uni-muenster.de

23. Oktober 2008

I *Zwei einführende Beispiele*

Trennung der Variablen ist eine der vielen nicht immer zum Erfolg führenden Methoden zum Lösen von Differentialgleichungen. Als ein Anwendungsbeispiel betrachte man die aus einem Spezialfall von [5, Kap.IV, §22, S.186] entstandene Differentialgleichung

$$f'(z) = \frac{f(z)}{z} \tag{1}$$

und erhält nach kurzer Rechnung $[\frac{df}{dz} = \frac{f}{z} \Rightarrow \int \frac{1}{f} df = \int \frac{1}{z} dz \Rightarrow log(f) = log(z) + log(c)]$ die Lösung

$$f(z) = cz \text{ mit } c \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Potenzreihenansatz mit Koeffizientenvergleich ist eine weitere Methode, welche hier illustiert wird durch die aus einem Spezialfall von [5, Kap.IV, §22, Aufgabe S.333] entstandene DGL

$$f''(z) = -\frac{3}{16z^2} f(z). \tag{3}$$

Mit dem Potenzreihenansatz

$$f(z) = c_1 z^{c_2} \tag{4}$$

erhält man

$$f''(z) = c_1 c_2 (c_2 - 1) z^{c_2 - 2} = -\frac{3}{16z^2} c_1 z^{c_2} = -\frac{3}{16z^2} f(z). \tag{5}$$

Koeffizientenvergleich ergibt für die Konstanten die Werte $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{4}$ oder $c_2 = \frac{3}{4}$ und somit die Lösungen

$$f(z) \equiv 0 \vee f(z) = cz^{\frac{1}{4}} \vee f(z) = cz^{\frac{3}{4}} \text{ mit } c \in \mathbb{C}^*. \tag{6}$$

II *Matrizenkalkül*

Im folgenden werden nur Differentialgleichungssysteme betrachtet, welche sich in Matrizenschreibweise darstellen lassen als eine lineare DGL erster Ableitungsordnung. Wie in der Linearen Algebra üblich genügt es auch hier sich zu beschränken auf die Untersuchung von homogenen linearen DGL der Form

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \mathfrak{A}(z)\mathfrak{w}. \tag{7}$$

Mit dem Ansatz

$$\mathfrak{w}(z) = \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z) \\ f'(z) \end{pmatrix} \tag{8}$$

findet man beispielsweise für die DGL (3) die Darstellung

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{16z^2} & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{w} \tag{9}$$

und somit die Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{16z^2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Eine *Fundamentalmatrix*, d.h. eine Matrix bestehend aus linear unabhängigen Lösungsvektoren der DGL, ist für dieses Beispiel

$$\mathfrak{X}(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}, \tag{11}$$

welche man beginnend mit den Lösungen aus (6) als oberste Zeile durch Termumformung erhält

$$\begin{pmatrix} z^{\frac{1}{4}} & z^{\frac{3}{4}} \\ \frac{1}{4}z^{-\frac{3}{4}} & \frac{3}{4}z^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & z^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}} \tag{12}$$

(vgl. [1, Kap.4, Abschn.2, S.113]).

III *Verallgemeinerung der Laurentreihenentwicklung*

$\mathcal{A}_{z_0}^{n,n} := \mathfrak{M}(n \times n; \mathcal{A}_{z_0})$ bezeichne den *Matrizenring über dem Ring der konvergenten Potenzreihen* mit dem gemeinsamen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $Q_{z_0}^{n,n} := \mathfrak{M}(n \times n; Q(\mathcal{A}_{z_0}))$ sei der *Matrizenring über dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen* mit dem gemeinsamen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (vgl. [3, Kap.1, S.1]). Unter der Menge der *Hilfsmatrizen*, im folgenden bezeichnet mit $\mathcal{H}$, versteht man alle Matrizen $\mathfrak{H} \in \mathfrak{M}(n \times n; \mathbb{C}[Z])$ (aus dem *Matrizenring über dem Polynomring der rationalen Funktionen*) mit $det(\mathfrak{H}(z)) \equiv 1$, die sich schreiben lassen als Produkt von Matrizen der Form

$$\mathfrak{H}_{(k,l)}(z) := \mathfrak{E}_n + p_{kl}(z) \cdot \mathfrak{E}_{(k,l)}, \tag{13}$$

wobei $\mathfrak{E}_n$ die $n \times n$ -Einheitsmatrix, $\mathfrak{E}_{(k,l)}$ die $n \times n$ -Matrix mit genau einem von Null verschiedenen normierten Eintrag in der k -ten Zeile und l -ten Spalte bezeichnet und die Bedingungen $p_{kl} \in \mathbb{C}[Z]$ und $k \neq l$ erfüllt sind, und

$$\mathfrak{H}_\sigma := (\pm\mathfrak{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \pm\mathfrak{e}_{\sigma(n)}), \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{e}_j$ den j -ten Einheitsspaltenvektor, $\sigma \in S_n := \{\pi | \pi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n, \pi \text{ bijektive Abb.}\}$ eine Permutation bezeichnet und die Vorzeichen $\pm$ frei wählbar sind bis auf die Einschränkung $det(\mathfrak{H}_\sigma) = 1$ (vgl. [3, Kap.1, S.3] und [4, S.384]).
Als eine Verallgemeinerung der aus der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen bekannten Laurentreihenentwicklung (z.B. hat für meromorphe Funktionen die Laurentreihenentwicklung die Form $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 1 \cdot (z-z_0)^{-n} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} c_{l-n}(z-z_0)^l$ (vgl. [2, Kap.VI, §3, S.159])) kann man die folgende Aussage ansehen:
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\mathfrak{T} \in (Q_{z_0}^{n,n})^*$. Dann gibt es eine Darstellung der Form

$$\mathfrak{T}(z) = \mathfrak{H}(z)(z-z_0)^\alpha \mathfrak{P}(z) \tag{15}$$

mit $\mathfrak{H} \in \mathcal{H}$, $\mathfrak{P} \in (\mathcal{A}_{z_0}^{n,n})^*$ und $(z-z_0)^\alpha = diag((z-z_0)^{\alpha_1}, \ldots, (z-z_0)^{\alpha_n})$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ (vgl. [3, Kap.4, S.42] und[4, S.384]).
Man findet beispielsweise

$$\begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

für die in (11) schon aufgetauchte Matrix. Mit der obigen Darstellung gibt es offenbar auch noch weitere, weshalb die in der Zerlegung auftretenden Matrizen nicht eindeutig bestimmt sind (vgl. [3, Kap.4, S.44]).

IV *Das Reduktionskriterium von Moser*

Für die in DGL (7) zu untersuchende Matrix gelte $\mathfrak{A} \in Q_{z_0}^{n,n}$. Für alle Einträge betrachte man den gleichen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und finde somit die Darstellung

$$\mathfrak{A}(z) = (z-z_0)^{-p(\mathfrak{A};z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}_k (z-z_0)^k \tag{17}$$

mit konstanten Matrizen $\mathfrak{A}_k \in \mathfrak{M}(n \times n; \mathbb{C}), \mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{O}$ und $p(\mathfrak{A}; z_0) \in \mathbb{Z}$. Überlegungen zum Konvergenzbereich kann man bei [3, Kap.2, S.17 ff.] finden.
Für $p(\mathfrak{A}; z_0) \leq 0$ ist die isolierte Singularität hebbar und daher sind im hier betrachteten Kontext keine weiteren Untersuchungen nötig. Für $0 < p(\mathfrak{A}; z_0) < \infty$ interpretiert man p als die *Polordnung* der nicht hebbaren isolierten Singularität z_0 von $\mathfrak{A}$. Bezeichne $r(\mathfrak{A}; z_0) := r(\mathfrak{A}_0)$ den aus der Linearen Algebra bekannten Rang der konstanten Matrix $\mathfrak{A}_0$ aus der Darstellung (17). Auf die vorherigen Definitionen aufbauend definiert man für den interessanten Fall $0 < p(\mathfrak{A}; z_0) < \infty$ durch $m(\mathfrak{A}; z_0) := p(\mathfrak{A}; z_0) - 1 + \frac{r(\mathfrak{A}; z_0)}{n}$ die *Ordnung* der zu untersuchenden Stelle z_0 von $\mathfrak{A}$. Für $p(\mathfrak{A}; z_0) \leq 0$ wird $m(\mathfrak{A}; z_0) := 0$ gesetzt.
Für das einführende Beispiel (3) schreibe man im Matrizenkalkül die Koeffizientenmatrix (10) in der Darstellung (17), also

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{16z^2} & 0 \end{pmatrix} = z^{-2} \left[z^0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \text{ mit } \mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Durch Ablesen sieht man $p(\mathfrak{A}; 0) = 2$, $r(\mathfrak{A}; 0) = 1$ und $n = 2$ und erhält $m(\mathfrak{A}; 0) = \frac{3}{2}$ (vgl. [3, Kap.2, S.34]).
$[\mathfrak{A}]_\sim := \{ \mathfrak{B} \in \mathcal{Q}_{z_0}^{n,n} : \exists\, \mathfrak{T} \in (\mathcal{Q}_{z_0}^{n,n})^* \wedge \mathfrak{B} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{T} - \mathfrak{T}^{-1}\frac{d}{dz}\mathfrak{T} \sim \mathfrak{A} \}$ bezeichne die zu $\mathfrak{A} \in \mathcal{Q}_{z_0}^{n,n}$ gehörende *Äquivalenzklasse*. Für $\mathfrak{A} \in \mathcal{Q}_{z_0}^{n,n}$ wird durch $\mu(\mathfrak{A}; z_0) := min\ \{m(\mathfrak{B}; z_0) \in \mathbb{Q}_0^+ : \mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]_\sim\}$ das *Minimum der Ordnung* aller Koeffizientenmatrizen der Äquivalenzklasse $[\mathfrak{A}]_\sim$ definiert. Man nennt $\mathfrak{A} \in \mathcal{Q}_{z_0}^{n,n}$ an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ *reduzibel* genau dann, wenn es eine Koeffizientenmatrix $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]_\sim$ gibt mit $m(\mathfrak{B}; z_0) < m(\mathfrak{A}; z_0)$. Erfahrungsgemäß bereitet es große Schwierigkeiten exakt diese Definition zu prüfen und daher verwendet man meist das folgende *Reduktionskriterium von Moser*:
Für die Reduzibilität von $\mathfrak{A} \in \mathcal{Q}_{z_0}^{n,n}$ an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Bedingungen $m(\mathfrak{A}; z_0) > 1$ und

$$\mathcal{P}(\lambda) = (z - z_0)^{r(\mathfrak{A}; z_0)} det(\lambda\mathfrak{E} + (z - z_0)^{p(\mathfrak{A}; z_0) - 1}\mathfrak{A}(z))\ |_{z - z_0 = 0} \equiv 0 \tag{19}$$

erfüllt sind. Die Reduktion der Ordnung ist in diesem Fall daher möglich durch eine Transformationsmatrix

$$\mathfrak{T}(z) = (\mathfrak{H}_0 + (z - z_0)\mathfrak{H}_1)\ \ diag(1, 1, \ldots, 1, z - z_0, z - z_0, \ldots, z - z_0) \tag{20}$$

mit $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1 \in \mathfrak{M}(n \times n; \mathbb{C})$ und $det(\mathfrak{H}_0) \neq 0$ (vgl. [3, Kap.4, S.60 ff.] und [4, S.381 f.]).
Angewendet auf die Koeffizientenmatrix (10) sieht man $m(\mathfrak{A}; 0) = \frac{3}{2} > 1$ und

$$\mathcal{P}(\lambda) = z^1 det(\lambda\mathfrak{E} + z^{2-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{16z^2} & 0 \end{pmatrix})\ |_{z=0} = z\,(\lambda^2 + \frac{3}{16})\ |_{z=0} \equiv 0. \tag{21}$$

Somit ist $\mathfrak{A}$ reduzibel an der Stelle $z_0 = 0$ und die Reduktion der Ordnung ist möglich mit

$$\mathfrak{T}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

(vgl. mit den bereits in (16) aufgetauchten Matrizen). Man erhält

$$\mathfrak{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{16z^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{16} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{z} \tag{23}$$

und kann somit von der DGL (9) übergehen zur DGL

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{16} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{z}\ \mathfrak{w}. \tag{24}$$

Der allgemeine Fall, welcher der DGL (1) zugrunde liegt, tritt hier auf und wird in der Literatur (z.B. bei [5, Kap.IV, §22, S.187 f.]) als *Eulersches System* bezeichnet. Nach Termumformung

$$z^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{16} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} log(z) \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

erhält man als eine mögliche FM für die DGL (24)

$$\mathfrak{Y}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

und gewinnt daraus durch Transformation

$$\tilde{\mathfrak{X}}(z) = \mathfrak{T}(z) \cdot \mathfrak{Y}(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

eine FM für die DGL (9). Dies kann man auch sehen mit der Darstellung

$$\tilde{\mathfrak{X}}(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot z^{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathfrak{X}(z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

da eine Multiplikation einer FM mit einer konstanten regulären (d.h. $det \neq 0$) Matrix von rechts wieder eine FM ergibt (vgl. [5, Kap.III, §15, S.139]).

V *Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen eines höchstens regulär singulären Punktes*

Für $[\mathfrak{A}]_\sim$ nennt man $z_0 \in \mathbb{C}$ einen *höchstens regulär singulären Punkt*, wenn $0 \leq \mu(\mathfrak{A}; z_0) \leq 1$ bzw. einen *nicht-höchstens regulär singulären Punkt*, wenn $\mu(\mathfrak{A}; z_0) > 1$ gilt (vgl. [3, Kap.2, S.33]). Mit dem Reduktionskriterium von Moser aus dem vorherigen Abschnitt formuliert man einen

Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen eines höchstens regulär singulären Punktes

1. Berechne die Ordnung $m(\mathfrak{A}; z_0) = p(\mathfrak{A}; z_0) - 1 + \frac{r(\mathfrak{A}; z_0)}{n}$
   Gilt $m(\mathfrak{A}; z_0) > 1$, dann weiter mit 2.
   Gilt $m(\mathfrak{A}; z_0) \leq 1$, dann weiter mit 4.
2. Berechne das Polynom $\mathcal{P}(\lambda) = (z - z_0)^{r(\mathfrak{A}; z_0)} det(\lambda\mathfrak{E} + (z - z_0)^{p(\mathfrak{A}; z_0) - 1}\mathfrak{A}(z)) \mid_{z - z_0 = 0}$
   Wenn $\mathcal{P}(\lambda) \equiv 0$, dann weiter mit 3.
   Wenn $\mathcal{P}(\lambda) \not\equiv 0$, dann weiter mit 4.
3. Berechne mit $\mathfrak{T}(z) = (\mathfrak{H}_0 + (z - z_0)\mathfrak{H}_1)\ diag(1, 1, \ldots, 1, z - z_0, z - z_0, \ldots, z - z_0)$ die Matrix $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]_\sim$ mit der Eigenschaft $m(\mathfrak{B}; z_0) < m(\mathfrak{A}; z_0)$. Für $\mathfrak{B}$ weiter mit 1.
4. Die Schleife endet mit einer Matrix $\mathfrak{C} \in [\mathfrak{A}]_\sim$,
   welche die Bedingung $m(\mathfrak{C}; z_0) \leq 1$ oder $\mathcal{P}(\lambda) \not\equiv 0$ erfüllt.

Die Entscheidung für die kritische Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ ist nun möglich:

Für $\mu(\mathfrak{A}; z_0) \leq m(\mathfrak{C}; z_0) \leq 1$ liegt ein höchstens regulär singulärer Punkt vor.
Für $\mu(\mathfrak{A}; z_0) = m(\mathfrak{C}; z_0) > 1$ liegt ein nicht-höchstens regulär singulärer Punkt vor (vgl. [3, Kap.5, S.64]).

Wenn ein höchstens regulär singulärer Punkt vorliegt, ist es offenbar möglich für die untersuchte DGL eine FM in einer Umgebung dieses Punktes zu finden. Für das hier bisher untersuchte Beispiel (9) ist die einzige kritische Stelle $z_0 = 0$ ein höchstens regulär singulärer Punkt und eine zugehörige FM wurde bereits angegeben.

VI *Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen einer höchstens regulär singulären Differentialgleichung*

Im folgenden betrachte man DGL mit möglicherweise mehreren kritischen Punkten $z_1, \ldots, z_m$. Präziser formuliert: Es werden als Einträge der Koeffizientenmatrix meromorphe Funktionen zugelassen. Eine DGL, welche in $\mathbb{C}$ nur höchstens regulär singuläre Punkte besitzt, nennt man eine *höchstens regulär singuläre Differentialgleichung*. Aufbauend auf den vorherigen Algorithmus formuliert man einen

Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen einer höchstens regulär singulären Differentialgleichung

- Führe für jedes $z_j \in \{z_1, \ldots, z_m\}$ den Entscheidungsalgorithmus zum Vorliegen eines höchstens regulär singulären Punktes aus dem vorherigen Abschnitt durch.

Eine Entscheidung für die betrachtete DGL ist nun möglich:

Wenn jedes z_j ein höchstens regulär singulärer Punkt ist, dann liegt eine höchstens regulär singuläre Differentialgleichung vor.
Wenn ein z_j ein nicht-höchstens regulär singulärer Punkt ist, dann liegt keine höchstens regulär singuläre Differentialgleichung vor (vgl. [3, Kap.5, S.69]).

Die Reduktion der Polordnung ist z.B. bei der DGL

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \begin{pmatrix} z^{-q} & -z^{-2q} \\ 1 & -z^{-q} \end{pmatrix} \mathfrak{w} \tag{29}$$

für alle $q \in \mathbb{N}$ möglich (vgl. [4, S. 380]), jedoch liegt nur im Spezialfall $q = 1$ ein höchstens regulär singulärer Punkt vor und, da dieser der einzige kritische Punkt in $\mathbb{C}$ ist, liegt somit auch eine höchstens regulär singuläre DGL vor. Für diesen Spezialfall erhält man als eine mögliche FM

$$\mathfrak{X}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_2 z^{\lambda_1} - \lambda_1 z^{\lambda_2} & z^{\lambda_1} - z^{\lambda_2} \\ -\lambda_1 z^{\lambda_1+1} + \lambda_2 z^{\lambda_2+1} & (\lambda_2 - 1) z^{\lambda_2+1} - (\lambda_1 - 1) z^{\lambda_1+1} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

wobei $\lambda_1 := -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\lambda_2 := -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ gesetzt worden ist (vgl. [3, Kap.5, S.65 ff.]).

Literatur

[1] Coddington, E.A.; Levinson, N.: **Theory of Ordinary Differential Equations**,
New York Toronto London, Mc Graw-Hill (1955).

[2] Fischer, W.; Lieb, I.: **Funktionentheorie**, 9.Aufl.,
Braunschweig Wiesbaden, Vieweg (2005).

[3] Hokamp, S.J.: **Zur Reduktion der Polordnung bei linearen Differentialgleichungssystemen**,
Diplomarbeit *Münster* (2008)

[4] Moser, J.: **The Order of a Singularity in Fuchs´ Theory**,
Mathematische Zeitschrift 72, S.379-398 (1960).

[5] Walter, W.: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**, 6.Aufl.,
Berlin u.a., Springer (1996).