2. Zufallsvorgänge und Wahrscheinlichkeiten

Ziel des Kapitels:

- Einführung elementarer Begriffe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (definitorisch)

Ziel der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

- Modellierung von zufälligen Vorgängen, wie z.B.
  - (zukünftiger) Umsatz eines Unternehmens
  - (zukünftige) Rendite einer Kapitalanlage
  - (zukünftige) Wachstumsraten einer VW
  - (zukünftige) Arbeitslosenquote

Zu präzisierende Begriffe:

- Zufallsvorgang, Zufallsexperiment
- (Zufalls)Ereignis, Wahrscheinlichkeit

Mathematische Hilfsmittel:

- Mengenlehre, Kombinatorik
- Analysis (Differential-, Integralrechnung)

2.1 Zufallsvorgänge und Ereignisse

Definition 2.1: (Zufallsvorgang, Zufallsexperiment)

Unter einem *Zufallsvorgang* verstehen wir einen Vorgang, bei dem

(a) im Voraus feststeht, welche möglichen Ausgänge dieser theoretisch haben kann,

(b) der sich einstellende, tatsächliche Ausgang im Voraus jedoch unbekannt ist.

Zufallsvorgänge, die geplant sind und kontrolliert ablaufen, heißen *Zufallsexperimente*. ■

Beispiele für Zufallsexperimente:

- Ziehung der Lottozahlen

- Roulette, Münzwurf, Würfelwurf

- 'Technische Versuche'
  (Härtetest von Stahlproben etc.)

In der VWL:

- Oft <u>keine</u> Zufallsexperimente
  (historische Daten, Bedingungen <u>nicht</u> kontrollierbar)

- Moderne VWL-Disziplin: 'Experimentelle Ökonomik'

Definition 2.2: (Ergebnis, Ergebnismenge)

Die Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsvorgangs heißt *Ergebnismenge* und wird mit Ω bezeichnet. Ein einzelnes Element $\omega \in \Omega$ heißt *Ergebnis*. Wir notieren die Anzahl aller Elemente von Ω (d.h. die Anzahl aller Ergebnisse) mit $|\Omega|$. ■

Beispiele: [I]

- Zufallsvorgang 'Werfen eines Würfels':

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Zufallsvorgang 'Werfen einer Münze solange, bis Kopf erscheint':

$$\Omega = \{\mathsf{K}, \mathsf{ZK}, \mathsf{ZZK}, \mathsf{ZZZK}, \mathsf{ZZZZK}, \ldots\}$$

Beispiele: [II]

- Zufallsvorgang 'Bestimmung des morgigen Wechselkurses zwischen Euro und US-$':

$$\Omega = [0, \infty)$$

Offensichtlich:

- Die Anzahl der Elemente von Ω kann *endlich*, *abzählbar unendlich* oder *nicht abzählbar unendlich* sein

Jetzt:

- Mengentheoretische Definition des Begriffes 'Ereignis'

Definition 2.3: (Ereignis)

Unter einem *Ereignis* verstehen wir eine Zusammenfassung von Ergebnissen eines Zufallsvorgangs, d.h. ein *Ereignis* ist eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω. Man sagt 'Das Ereignis A tritt ein', wenn der Zufallsvorgang ein $\omega \in A$ als Ergebnis hat. ■

Bemerkungen: [I]

- Notation von Ereignissen: $A, B, C, \ldots$ oder $A_1, A_2, \ldots$

- $A = \Omega$ heißt das *sichere Ereignis*
(denn für jedes Ergebnis ω gilt: $\omega \in A$)

Bemerkungen: [II]

- $A = \emptyset$ (leere Menge) heißt das *unmögliche Ereignis* (denn für jedes ω gilt: $\omega \notin A$)

- Falls das Ereignis A eine Teilmenge des Ereignisses B ist ($A \subset B$), so sagt man: 'Das Eintreten von A impliziert das Eintreten von B'
(denn für jedes $\omega \in A$ folgt $\omega \in B$)

Offensichtlich:

- Ereignisse sind Mengen

$\longrightarrow$ Anwendung von Mengenoperationen auf Ereignisse ist sinnvoll

Ereignisverknüpfungen (Mengenoperationen): [I]

- *Durchschnittsereignis* (-menge):

$$C = A \cap B \text{ tritt ein, wenn } A \text{ \underline{und} } B \text{ eintreten}$$

- *Vereinigungsereignis* (-menge):

$$C = A \cup B \text{ tritt ein, wenn } A \text{ \underline{oder} } B \text{ eintritt}$$

- *Differenzereignis* (-menge):

$$C = A \backslash B \text{ tritt ein, wenn } A \text{ eintritt, aber } B \text{ nicht}$$

Ereignisverknüpfungen (Mengenoperationen): [II]

- *Komplementärereignis*:

$$C = \Omega \backslash A \equiv \overline{A} \text{ tritt ein, wenn } A \text{ \underline{nicht} eintritt}$$

- Die Ereignisse A und B heißen *unvereinbar* oder *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$
(beide Ereignisse können nicht gleichzeitig eintreten)

Jetzt:

- Übertragung der Konzepte von 2 auf n Mengen $A_1, \ldots, A_n$

Ereignisverknüpfungen: [I]

- *Durchschnittsereignis*:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ tritt ein, wenn } \underline{\text{alle}}\ A_i \text{ eintreten}$$

- *Vereinigungsereignis*:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ tritt ein, wenn } \underline{\text{mindestens ein}}\ A_i \text{ eintritt}$$

Ereignisverknüpfungen: [II]

- Die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ heißen *Partition* (oder vollständige Zerlegung) von Ω, falls gilt:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega \\ A_i \cap A_j &= \emptyset \quad \text{für alle } i \neq j \\ A_i &\neq \emptyset \quad \text{für alle } i \end{aligned}$$

Wichtige Rechenregeln für Mengen (Ereignisse):

- Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze

- *De Morgansche* Regeln:

  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.2 Wahrscheinlichkeiten

Ziel:

- Jedem Ereignis A soll eine Zahl $P(A)$ zugeordnet werden, welche die *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten von A repräsentiert

- Formal:

$$P : A \longrightarrow P(A)$$

Frage:

- Welche Eigenschaften sollte die Zuordnung (Mengenfunktion) P besitzen?

Definition 2.4: (Kolmogorov'sche Axiome)

Die folgenden 3 Mindestanforderungen an P werden als *Kolmogorov'sche Axiome* bezeichnet:

- *Nichtnegativität*: Für alle A soll gelten: $P(A) \geq 0$

- *Normierung*: $P(\Omega) = 1$

- *Additivität*: Für zwei disjunkte Ereignisse A und B (d.h. für $A \cap B = \emptyset$) soll gelten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \blacksquare$$

Es ist leicht zu zeigen:

- Die 3 Kolmogorov'schen Axiome implizieren bestimmte Eigenschaften und Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Satz 2.5: (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

Aus den Kolmogorov'schen Axiomen ergeben sich folgende Eigenschaften für die Wahrscheinlichkeit beliebiger Ereignisse:

- *Wahrscheinlichkeit des Komplimentärereignisses*:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

- *Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignissses*:

$$P(\emptyset) = 0$$

- *Wertebereich der Wahrscheinlichkeit*:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \blacksquare$$

Satz 2.6: (Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten) [I]

Aus den Kolmogorov'schen Axiomen ergeben sich die folgenden Rechenregeln für die Wahrscheinlichkeit von beliebigen Ereignissen A, B, C:

- *Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt)

- *Additionssatz für* 3 *Ereignisse*:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad -P(A \cap B) - P(B \cap C) \\ &\quad -P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder C eintritt)

Satz 2.6: (Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten) [II]

- *Wahrscheinlichkeit des Differenzereignisses*:

$$\begin{aligned} P(A \backslash B) &= P(A \cap \overline{B}) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Man beachte:

- Wenn das Ereignis B das Ereignis A impliziert (d.h. wenn $B \subset A$ gilt), dann folgt

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$$

Beispiel: [I]

- In einer Stadt erscheinen 2 Lokalzeitungen, die *Morgenpost* und der *Stadtspiegel*. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewohner der Stadt
  - die *Morgenpost* liest (Ereignis A) sei 0.6,
  - den *Stadtspiegel* liest (Ereignis B) sei 0.5,
  - die *Morgenpost* oder den *Stadtspiegel* liest sei 0.9

Beispiel: [II]

- Die Wskt., dass jemand beide Blätter liest, beträgt

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.9 = 0.2 \end{aligned}$$

- Die Wskt., dass jemand kein Blatt liest, beträgt

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0.9 = 0.1 \end{aligned}$$

- Die Wskt., dass jemand genau eines der beiden Blätter liest, beträgt

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= 0.9 - 0.2 = 0.7 \end{aligned}$$

Bisher:

- Formale Anforderungen an Wahrscheinlichkeiten

$\longrightarrow$ Eigenschaften und grundlegende Rechenregeln

Noch ungeklärt:

- Wie wird eine explizite Wskt. für ein bestimmtes Ereignis A überhaupt festgelegt?

Verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe:

- Klassische Wahrscheinlichkeit (*Laplace*–Experiment)

- Statistische Wahrscheinlichkeit (Häufigkeitstheorie)

- Subjektive Wahrscheinlichkeit (durch Experimente)

Zentraler Begriff der VL:

- Der *Laplace*-sche Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1812:

> Wenn ein Experiment eine Anzahl verschiedener und gleich möglicher Ausgänge hervorbringen kann und einige davon als günstig anzusehen sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ausgangs gleich dem Verhältnis der Anzahl der günstigen zur Anzahl der möglichen Ausgänge.

Offensichtlich:

- Dem *Laplace*-schen Wahrscheinlichkeitsbegriff liegt die Vorstellung eines Zufallsexperimentes zugrunde, bei dem die Ergebnismenge Ω aus n Ergebnissen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ besteht, die alle die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit $1/n$ aufweisen

Jetzt:

- Formale Definition

Definition 2.7: (Laplace-Experiment, -Wahrscheinlichkeit)

Ein Zufallsexperiment heißt *Laplace-Experiment*, wenn die Ergebnismenge Ω aus n Ergebnissen besteht (d.h. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$) und jedes Ergebnis ω_i die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/n$ besitzt, d.h.

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Die *Laplace-Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses $A \subset \Omega$ ist dann definiert als

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}. \quad \blacksquare$$

Offensichtlich:

- Laplace-Wahrscheinlichkeit erfüllt die Kolmogorov'schen Axiome (Definition 2.4), denn
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$
  - Für die Ereignisse A, B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:
$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n} = P(A) + P(B)$$

'Fairer' Würfelwurf als Beispiel für Laplace-Experiment:

- Es ist:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Es gilt:

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 6$$

- Laplace-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A =$ 'Würfeln einer geraden Zahl'

  Es ist:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$\longrightarrow$ Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 0.5$$

Offensichtlich:

- Laplace-Wahrscheinlichkeit erfordert Berechnung von Anzahlen

Mathematische Technik hierfür:

- *Kombinatorik*

Einige grundsätzliche Fragen der Kombinatorik:

- Wie Möglichkeiten gibt es, bestimmte Objekte anzuordnen?

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, bestimmte Objekte aus einer Menge auszuwählen?

Mathematische Werkzeuge der Kombinatorik:

- *Fakultät*

- *Binomialkoeffizient*

Zunächst:

- Definitionen von Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition 2.8: (Fakultät)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Unter der *Fakultät* von n, in Zeichen $n!$, versteht man das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n, d.h.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Für $n = 0$ wird die Fakultät definitorisch festgelegt als

$$0! = 1. \quad \blacksquare$$

Beispiele:

- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = 120$
- $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 3628800$

Offensichtlich:

- Fakultäten wachsen sehr schnell an

Definition 2.9: (Binomialkoeffizient)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen mit $n > 0, k \geq 0$ und $n \geq k$. Unter dem *Binomialkoeffizienten*, gesprochen als 'n über k', versteht man den Ausdruck

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \blacksquare$$

Beispiele:

- 'Einfaches Rechenbeispiel':

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

- 'Komplizierteres Rechenbeispiel':

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

- 'Formales Beispiel':

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

Jetzt:

- Inhaltliche (kombinatorische) Bedeutung von Fakultät und Binomialkoeffizient für die Bestimmung der *Anzahl von Anordnungs- bzw. Auswahlmöglichkeiten*

$\longrightarrow$ Bestimmung von *Laplace-Wahrscheinlichkeiten*

Zunächst Fundamentalprinzip der Kombinatorik:

- Wenn ein erster Sachverhalt auf n_1 Arten erfüllt werden kann und ein zweiter Sachverhalt unabhängig davon auf n_2 Arten, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten, gleichzeitig beide Sachverhalte zu erfüllen, gerade gleich dem Produkt $n_1 \cdot n_2$

Beispiel:

- Ein Fußballtrainer hat für den Posten des Torwarts 3 Kandidaten und für die Besetzung des Mittelstürmers 4 (andere) Kandidaten zur Auswahl. Insgesamt kann er also das Mannschaftsgespann (Torwart, Mittelstürmer) auf $3 \cdot 4 = 12$ Arten besetzen

Verallgemeinerung:

- Gegeben seien k Sachverhalte, die unabhängig voneinander auf jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Arten erfüllt werden können

$\longrightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten, die k Sachverhalte gleichzeitig zu erfüllen, beträgt

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Spezialfall:

- $n_1 = n_2 = \ldots = n_k \equiv n$

$\longrightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten, die k Sachverhalte gleichzeitig zu erfüllen, beträgt

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

Beispiel:

- Wie viele Autokennzeichen kann die Stadt Münster vergeben, wenn nach dem Stadtkürzel 'MS' 1 oder 2 Buchstaben und eine 1 bis 3 stellige Zahl vergeben wird?
  Lösung:

$$27 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 702000$$

Zwischenfazit:

- Die Bestimmung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten erfordert die Bestimmung von Anzahlen. Die *Kombinatorik* liefert Methoden zur Berechnung

  - der Anzahlen möglicher Anordnungen von Objekten (*Permutationen*)

  - der Möglichkeiten, Objekte aus einer vorgegebenen Menge auszuwählen (*Variationen, Kombinationen*)

Definition 2.10: (Permutation)

Gegeben sei eine Menge mit n Elementen. Jede Anordnung all dieser Elemente in irgendeiner Reihenfolge heißt eine *Permutation* dieser n Elemente. ■

Beispiel:

- Aus der Menge $\{a, b, c\}$ lassen sich die folgenden 6 Permutationen bilden:

$$abc \quad bac \quad cab \quad acb \quad bca \quad cba$$

Allgemein gilt:

- Die Anzahl aller Permutationen von n <u>verschiedenen</u> Objekten beträgt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Jetzt:

- Von den n Objekten sollen <u>nicht alle verschieden</u> sein. Vielmehr sollen sich die n Objekte in J Kategorien aufteilen mit den Kategorienanzahlen n_1 (z.B. Anzahl weiße Kugeln), n_2 (Anzahl rote Kugeln) bis n_J (Anzahl schwarze Kugeln)

Es gilt:

- $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_J$

- Die Anzahl aller Permutationen der n Objekte ist gegeben durch

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_J!}$$

Bemerkungen:

- Die Anordnungen, bei denen Objekte der gleichen Art permutiert werden, sind <u>nicht unterscheidbar</u>

- Sind alle n Objekte verschieden, so ist die Anzahl aller möglichen Permutationen gleich $n!$ (vgl. Folie 54)

Beispiel:

- Die Anzahl der Permutationen der $n = 9$ Buchstaben des Wortes *STATISTIK* beträgt

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = 15120$$

Jetzt:

- Auswahl von Objekten aus einer vorgegebenen Menge

Definition 2.11: (Kombination)

Gegeben sei eine Menge mit n unterscheidbaren Elementen (z.B. Kugeln mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$). Jede Zusammenstellung (bzw. Auswahl) von k Elementen aus dieser Menge heißt *Kombination der Ordnung k*. ■

Unterscheidungsmerkmale von Kombinationen:

- Berücksichtigung der Auswahl-Reihenfolge
  - Ja $\longrightarrow$ Kombination wird *Variation* genannt
  - Nein $\longrightarrow$ Keine besond. Bezeichnung (*Kombination*)
- Auswahl *mit* oder *ohne Zurücklegen*

Insgesamt also 4 alternative Fälle:

- *Variationen mit Zurücklegen*
- *Variationen ohne Zurücklegen*
- *Kombinationen ohne Zurücklegen*
- *Kombinationen mit Zurücklegen*

1. Fall: *Variationen mit Zurücklegen*

Beim *Ziehen mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge* gibt es nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$$

verschiedene Möglichkeiten

Beispiel:

- Ein 'fairer' Würfel werde 4 mal hintereinander geworfen und das Ergebnis in einer 4-Sequenz notiert (z.B. $1, 5, 1, 2$). Die Anzahl aller möglichen Ergebnissequenzen beträgt

$$\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{4 Würfe}} = 6^4 = 1296$$

2. Fall: *Variationen ohne Zurücklegen*

Beim *Ziehen ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge* gibt es nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

verschiedene Möglichkeiten ($k \leq n$)

Beispiel:

- Im olympischen Finale eines 100-Meter-Laufes starten 8 Teilnehmer. Die Anzahl der verschiedenen Kombinationen für Gold, Silber und Bronze beträgt

$$\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

3. Fall: *Kombinationen ohne Zurücklegen*

Beim *Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* ist die Anzahl der verschiedenen Kombinationen gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge vom Umfang n eine Teilmenge vom Umfang k ($k \leq n$) zu entnehmen. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(Binomialkoeffizient, vgl. Definition 2.9, Folie 47)

Begründung:

- Betrachte die Formel für *Variationen ohne Zurücklegen* aus Fall 2. Die dort bestimmte Anzahl $n!/(n-k)!$ muss nun noch durch $k!$ dividiert werden, da es in jeder Menge mit k Elementen auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt

Beispiel:

- Ziehung der Lotto-Zahlen '6 aus 49'. Anzahl der möglichen Kombinationen beträgt:

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

4. Fall: *Kombinationen mit Zurücklegen*

Beim *Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* beträgt die Anzahl der verschiedenen Kombinationen

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

(Binomialkoeffizient, vgl. Definition 2.9, Folie 47)

Begründung:

- Etwas technisch, vgl. eines der angegebenen Standardlehrbücher, z.B. Mosler / Schmid (2008)

Beispiel: (Häufungswahl)

- Bei einer Wahl stehen 10 Kandidaten zur Auswahl. Ein Wähler hat 3 Stimmen und das Recht, bei einem Kandidaten mehr als 1 Kreuz zu machen. Die Anzahl der Möglichkeiten Kreuze zu setzen beträgt somit

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$$

Überblick Kombinationen

Anzahl der Möglichkeiten,
aus n verschiedenen Objekten k auszuwählen

	ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (*Kombinationen*)	*mit* Berücksichtigung der Reihenfolge (*Variationen*)
ohne Zurücklegen	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
mit Zurücklegen	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Beispiel für die Berechnung einer Laplace-Wskt: [I]

- Wskt. für '4 Richtige im Lotto'

- Zunächst: Anzahl aller möglichen Kombinationen beträgt

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

- Jetzt gesucht: Anzahl von Kombinationen, die einen Vierer darstellen

- Für einen Vierer müssen 4 von den 6 Richtigen und gleichzeitig 2 von den 43 Falschen zusammenkommen

Beispiel für die Berechnung einer Laplace-Wskt: [II]

- Nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik ergeben sich

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 15 \cdot 903 = 13545$$

verschiedene Viererkombinationen

$\longrightarrow$ Hieraus folgt für die Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{'4 Richtige im Lotto'}) = \frac{13545}{13983816} = 0.0009686$$

2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Jetzt:

- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unter Zusatzinformationen

Genauer:

- Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn bekannt ist, dass ein anderes Ereignis B bereits eingetreten ist

Beispiel:

- Betrachte 'fairen Würfelwurf'
- Ereignis A: Würfeln der '6'. Es gilt zunächst
$$P(A) = 1/6$$
- Ereignis B: 'Würfeln einer geraden Zahl' soll bereits eingetreten sein (Vorinformation)

$\longrightarrow$ Wskt. von A unter der Bedingung B ist
$$P(A|B) = 1/3$$
- Grund:
Müssen zur Berechnung der Wskt. von A nur noch die Ergebnisse $\{2\}, \{4\}, \{6\}$ aus B betrachten

Andererseits:

- Betrachte Ereignis C: Würfeln der '3'

- Offensichtlich gilt:

$$P(C|B) = 0$$

- Grund: Ereignisse B und C können nicht gemeinsam eintreten, d.h. $P(B \cap C) = 0$

Frage:

- Wie kommt man mathematisch zur bedingten Wskt.

$$P(A|B) = 1/3$$

Antwort:

- Indem man die Wskt. des gemeinsamen Eintretens von A und B (d.h. von $A \cap B$) zur Wskt. des Eintretens von B in Beziehung setzt

Definition 2.12: (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Es seien A und B zwei Ereignisse, wobei $P(B) > 0$ gelten soll. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist, kurz: die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der Bedingung B, ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 1 (Fairer Würfelwurf):

- A: Würfeln der '6', d.h. $A = \{6\}$

- B: Würfeln einer geraden Zahl, d.h. $B = \{2, 4, 6\}$

$\longrightarrow A \cap B = \{6\}$

$$\longrightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2 (2-facher fairer Würfelwurf): [I]

- Ein Würfel werde zweimal geworfen und das Ergebnis in einer 2-Sequenz notiert. Wie groß ist die *Laplace*-Wahrscheinlichkeit, dass in einer der beiden Würfe eine 6 fällt unter der Bedingung, dass die Augensumme der beiden Würfe größer als 9 ist?

- Mögliche Ergebnisse des Experimentes:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Beispiel 2 (2-facher fairer Würfelwurf): [II]

- $A =$ 'mindestens eine 6', d.h.

$$\begin{aligned} A &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6), \\ &\quad (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\} \end{aligned}$$

- $B =$ 'Augensumme > 9', d.h.

$$B = \{(6,4),(6,5),(6,6),(5,5),(5,6),(4,6)\}$$

- Somit gilt

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Beispiel 2 (2-facher fairer Würfelwurf): [III]

- Der Schnitt ergibt sich zu

$$A \cap B = \{(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6)\}$$

- Somit gilt

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

- Für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/36}{6/36} = \frac{5}{6}$$

Jetzt verallgemeinerte Sichtweise:

- Betrachte die bedingte Wskt. $P(A|B)$ für beliebige Ereignisse $A \subset \Omega$ (in Zeichen: $P(\cdot|B)$)

Es gilt:

- Die bedingte Wskt. $P(\cdot|B)$ erfüllt die *Kolmogorov'schen Axiome* (vgl. Definition 2.4, Folie 31)

Beweis: [I]

- Für jedes A gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

Beweis: [II]

- Für das sichere Ereignis Ω gilt:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

- Für $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\
&= P(A_1|B) + P(A_2|B)
\end{aligned}$$

Konsequenz:

- Die aus den *Kolmogorov'schen Axiomen* folgenden Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten gelten weiter, z.B.
  - $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
  - $P(\emptyset|B) = 0$
  - $0 \leq P(A|B) \leq 1$
  - $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$
  - $\ldots$

Aus Definition 2.12 folgt unmittelbar:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Ebenso gilt:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Fazit:

- Die Wskt. für das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse A und B (d.h. für $A \cap B$) ist jeweils das *Produkt* einer *bedingten Wskt.* mit der *unbedingten Wskt.* des bedingenden Ereignisses

- Die beiden obigen Formeln heißen *Multiplikationssatz für zwei Ereignisse*

Natürliche Erweiterung:

- *Multiplikationssatz für n Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n$
  (d.h. Formel für Wskt. des gleichzeitigen Eintretens)

- nicht hier, siehe z.B. Mosler / Schmid (2008)

Hier:

- *Multiplikationssatz für* 3 *Ereignisse* A, B, C:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C) \\
&= P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)
\end{aligned}
$$

Beispiel (Bestehen der Statistik-II-Klausur): [I]

- Für den Erwerb des Statistik-II-Scheines hat man 3 Versuche. Für die 3 Ereignisse A_i: 'StudentIN besteht beim i-ten Versuch', $(i = 1, \ldots, 3)$, seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.6 \\ P(A_2|\overline{A}_1) &= 0.5 \\ P(A_3|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) &= 0.4 \end{aligned}$$

- Frage:
  Wie hoch ist die Wskt., den Schein zu erwerben?

Beispiel (Bestehen der Statistik-II-Klausur): [II]

- Die gesuchte Wskt. ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \\ &= 1 - P(\overline{A}_3 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_1) \\ &= 1 - P(\overline{A}_3 | \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_2 | \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_1) \\ &= 1 - (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.6) \\ &= 0.88 \end{aligned}$$

Betrachte nun den folgenden Fall:

- Das Eintreten des Ereignisses A hat keinerlei Einfluss auf das Eintreten des Ereignisses B (und umgekehrt)

$\longrightarrow$ Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit*

Definition 2.13: (Stochastische Unabhängigkeit)

Zwei Ereignisse A und B heißen *stochastisch unabhängig* (oder kurz: *unabhängig*), falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt. A und B heißen *abhängig*, falls die Ereignisse *nicht unabhängig* sind. $\blacksquare$

Bemerkungen: [I]

- In Definition 2.13 sind die Rollen von A und B vertauschbar

- Unter der Annahme $P(B) > 0$ gilt:

$$A \text{ und } B \text{ sind unabhängig} \Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

  Unter der Annahme $P(A) > 0$ gilt:

$$A \text{ und } B \text{ sind unabhängig} \Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

  (Bei Unabhängigkeit hängen die bedingten Wskt.'en nicht von den jeweils bedingenden Ereignissen ab)

Bemerkungen: [II]

- Mit A und B sind auch die folgenden Ereignisse jeweils unabhängig:

$$A \text{ und } \overline{B}, \quad \overline{A} \text{ und } B, \quad \overline{A} \text{ und } \overline{B}$$

- Ist A ein Ereignis mit $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$, so ist A von jedem beliebigen Ereignis B unabhängig

- Wenn A und B disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$) und die Wskt.'en $P(A), P(B) > 0$ sind, können A und B nicht unabhängig sein

Beispiel: [I]

- Betrachte zweimaligen Münzwurf (Z=Zahl, K=Kopf). Ergebnisse des *Laplace*-Experimentes werden als 2-Sequenzen notiert. Es ist

$$\Omega = \{(Z,Z),(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$$

- Betrachte die Ereignisse

A : Zahl beim ersten Wurf
B : Kopf beim zweiten Wurf
C : Kopf bei beiden Würfen

Beispiel: [II]

- Für die Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cap B) = P(\{(Z, K)\}) = 1/4$$

sowie

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= P(\{(Z, Z), (Z, K)\}) \cdot P(\{(Z, K), (K, K)\}) \\ &= 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ A und B sind *stochastisch unabhängig*

Beispiel: [III]

- Für die Ereignisse B und C gilt:

$$P(B \cap C) = P(\{(K,K)\}) = 1/4$$

sowie

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{(Z,K),(K,K)\}) = 1/2 \\ P(C) &= P(\{(K,K)\}) = 1/4 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/4 = 1/8 \neq 1/4 = P(B \cap C)$$

$\Longrightarrow$ B und C sind *stochastisch abhängig*

Jetzt:

- Verallgemeinerung des Unabhängigkeitsbegriffes von 2 auf n Ereignisse

Definition 2.14: (Unabhängigkeit von n Ereignissen)

Die n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen *paarweise unabhängig*, falls für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ gilt

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j).$$

Die n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen *vollständig unabhängig*, falls für jede Auswahl von m Indizes,

$$i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\},\ 2 \leq m \leq n,$$

gilt

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_m}). \quad \blacksquare$$

Bemerkungen:

- Für den Fall $n = 3$ ist die *paarweise Unabhängigkeit* gegeben, falls gilt

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned}$$

  Die 3 Ereignisse sind *vollständig unabhängig*, falls gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

- Vorsicht: *vollständige* und *paarweise Unabhängigkeit* sind <u>nicht</u> das gleiche. Das Konzept der *vollständigen Unabhängigkeit* ist strenger

Beispiel: [I]

- Betrachte das *Laplace*-Experiment des zweifachen Würfelwurfes mit den Ereignissen

$$\begin{array}{ll} A_1: & \text{Augenzahl beim 1. Wurf ist ungerade} \\ A_2: & \text{Augenzahl beim 2. Wurf ist ungerade} \\ A_3: & \text{Augensumme ungerade} \end{array}$$

- Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = \ 1/2 \cdot 1/2 \ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = \ 1/2 \cdot 1/2 \ &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = \ 1/2 \cdot 1/2 \ &= P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ A_1, A_2, A_3 sind *paarweise unabhängig*

Beispiel: [II]

- Es gilt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \quad &\neq \quad 1/8 \\
&= \quad 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \\
&= \quad P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ A_1, A_2, A_3 sind <u>nicht</u> *vollständig unabhängig*

2.4 Totale Wahrscheinlichkeit und das Bayes-Theorem

Idee des Konzeptes der *totalen Wahrscheinlichkeit*:

- Man kann die (unbedingte) Wskt. des Ereignisses A ausrechnen, wenn man bestimmte bedingte Wskt.'en von A und die zugehörigen Wskt.'en der Bedingungen kennt

Satz 2.15: (Satz von der *totalen Wahrscheinlichkeit*)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ eine *Partition* der Ergebnismenge Ω und B ein beliebiges Ereignis. Dann gilt für die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit von B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i). \quad \blacksquare$$

Herleitung: [I]

- Da $A_1, \ldots, A_n$ eine vollständige Zerlegung von Ω darstellt, folgt

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

- Man beachte, dass die Mengen

$$(B \cap A_1), (B \cap A_2), \ldots, (B \cap A_n)$$

paarweise disjunkt sind

Herleitung: [II]

- Aus der *paarweisen Disjunktheit*, dem 3. *Kolmogorov'schen Axiom* (vgl. Folie 31) sowie der *Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit* folgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \end{aligned}$$

Fazit:

- Die (unbedingte) Wskt. von B ergibt sich aus gewichteten bedingten Wskt.'en von B

Beispiel: [I]

- Ein und derselbe Massenartikel werde auf zwei Maschinen gefertigt. Die schnellere Maschine $M1$ hinterläßt 10% Ausschuss, produziert aber doppelt soviel wie die langsamere Maschine $M2$, die aber nur einen Ausschuss von 7% aufweist. Wie groß ist die Wskt., dass ein zufällig aus der Gesamtproduktion gezogenes Einzelstück defekt ist?

- Definition der Ereignisse:

B: Stück ist defekt
A_1: Stück auf $M1$ produziert
A_2: Stück auf $M2$ produziert

Beispiel: [I]

- Folgende Wskt.'en sind gegeben:

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.1 \\ P(B|A_2) &= 0.07 \\ P(A_1) &= 2/3 \\ P(A_2) &= 1/3 \end{aligned}$$

- Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{2} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \\ &= 0.1 \cdot 2/3 + 0.07 \cdot 1/3 \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

Jetzt:

- Verbindung zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten, bei denen die Rollen zwischen bedingtem und bedingendem Ereignis vertauscht sind
(etwa Zusammenhang zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$)

$\longrightarrow$ *Bayes-Theorem*

Herleitung des *Bayes-Theorems*: [I]

- Betrachte den *Multiplikationssatz für zwei Ereignisse* (vgl. Folie 78)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- Daraus folgt:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

- Diese Beziehung gilt für zwei beliebige Ereignisse und deshalb auch für jedes $A_i, i = 1, \ldots, n$, einer *beliebigen Partition* der Grundmenge Ω:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Herleitung des *Bayes-Theorems*: [II]

- Ersetzt man $P(B)$ durch den Ausdruck aus dem Satz 2.15 der *totalen Wahrscheinlichkeit* (vgl. Folie 92), so erhält man das *Bayes-Theorem*

Satz 2.16: (*Bayes-Theorem*)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ eine *Partition* der Ergebnismenge Ω und B ein beliebiges Ereignis mit $P(B) > 0$. Dann gilt für jedes A_i:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}. \quad \blacksquare$$

Beispiel: [I]

- An Patienten einer bestimmten Population wird durch einen Labortest untersucht, ob eine bestimmte Krankheit vorliegt oder nicht. Der Anteil der Kranken in der Population ist bekannt und wird mit π bezeichnet. Falls ein konkret untersuchter Patient krank ist, zeigt der Test die Krankheit mit einer Wskt. von 99% an (Ergebnis 'positiv'). Falls er nicht krank ist, zeigt der Test die Krankheit (fälschlicherweise) mit einer Wskt. von 2% an.

- Wie groß ist die Wskt., dass die Krankheit vorliegt unter der Bedingung, dass der Test positiv ausfällt?

Beispiel: [II]

- Definition der Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_1: &\quad \text{Krankheit liegt vor} \\ A_2 = \overline{A}_1: &\quad \text{Krankheit liegt nicht vor} \\ B: &\quad \text{Test zeigt Krankheit an} \end{aligned}$$

- Folgende Wskt.'en sind gegeben:

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.99 \\ P(B|A_2) &= 0.02 \\ P(A_1) &= \pi \end{aligned}$$

- Gesucht: $P(A_1|B)$

Beispiel: [III]

- Mit dem *Bayes-Theorem* gilt:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)}$$

$$= \frac{0.99 \cdot \pi}{0.99 \cdot \pi + 0.02 \cdot (1 - \pi)}$$

- Offensichtlich:
  Krankenanteil π hat starken Einfluss auf die gesuchte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: [III]

- Beispielswerte:

$$
\begin{aligned}
P(A_1|B) &= 0.846 \qquad (\pi = 0.1) \\
P(A_1|B) &= 0.333 \qquad (\pi = 0.01) \\
P(A_1|B) &= 0.047 \qquad (\pi = 0.001) \\
P(A_1|B) &= 0.005 \qquad (\pi = 0.0001)
\end{aligned}
$$